SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. Favini

PARABOLICITA' DI EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE NEGLI SPAZI DI HILBERT

8 Febbraio 1990

INTRODUZIONE

In questo Seminario esporrò alcuni risultati concernenti la parabolicità di una equazione come

$$(1) \qquad u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(t) \ , \ t \in R^+ \ ,$$

in uno spazio di Hilbert complesso X.

Recentemente sono stati dedicati alla (1) un grande numero di lavori.

La maggior parte di essi trasforma la (1) in un sistema del primo ordine in un opportuno spazio prodotto. Vengono quindi fatte delle ipotesi che consentono di provare la parabolicità della nuova equazione.

In effetti, se $D(A) \subset D(B)$, $-A$ e $-B$ generano semigruppi analitici, la parabolicità della (1) non è affatto garantita, come provato, con un controesempio, nel lavoro di A. Favini e E. Obrecht [FO]. Richiamo che per parabolicità di (1) si intende:

a) Posto $D(P) = D(A) \cap D(B)$, $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + A$, $P(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ esiste per ogni

$$\lambda \in \Sigma = \{z \in \mathbf{C} \ ; |z| \geq K, \ |\arg z| \leq \theta_0\} \ , \quad \pi/2 < \theta_0 < \pi$$

b) Esiste $M > 0$ tale che

$\|P(\lambda)^{-1};\ \mathfrak{L}(X)\| \leq M|\lambda|^{-2}$, $\|BP(\lambda)^{-1};\ \mathfrak{L}(X)\| \leq M(\lambda)^{-1}$,

$\|AP(\lambda)^{-1};\ \mathfrak{L}(X)\| \leq M, \qquad \lambda \in \Sigma$.

Vediamo di spiegare le difficoltà che si incontrano riducendo (1), mediante $u' = v$ a

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Posto $\mathcal{A}(u,v) = (-v, Au + Bv)$, $D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(B)$, spazio ambiente uguale a $X \times X$, $\mathcal{A}$ può non essere chiuso, prima di tutto, e poi può essere difficile stabilire, per il risolvente di $-\mathcal{A}$ le stime

$$\|(\lambda+\mathcal{A})^{-1};\ \mathfrak{L}(X \times X)\| \leq C|\lambda|^{-1},\ \mathrm{Re}\lambda \geq \text{costante}.$$

Si tenta allora di trasformare la (2) in un equazione equivalente parabolica, mediante un opportuno cambiamento di variabili. Per esempio,

$$\begin{bmatrix} B & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

dove si suppone, senza perdere molta generalità, B invertibile. Allora

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} B & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} =$$

$$(3) \quad -\begin{bmatrix} B & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t) \end{bmatrix} =$$

$$-\left(\begin{bmatrix} AB^{-1} & -AB^{-1} \\ 0 & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ AB^{-1} & -AB^{-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Se assumiamo AB^{-1} piccolo rispetto a B, l'operatore che conta in (3) è solo

$$\begin{bmatrix} AB^{-1} & -AB^{-1} \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

triangolare superiore. Il suo opposto genera un semigruppo analitico in XxX se $-AB^{-1}$ e $-B$ sono generatori di analoghi semigruppi in X.

E' poi chiaro che se (x,y) risolve (3), allora la (u,v) legata ad (x,y) delle

relazioni precedenti, soddisfa la (2).

Riassumendo:

Teorema 1. *Sia* X *uno spazio di Banach e siano* A,B *operatori lineari chiusi in* X *(a dominio anche non denso) tali che*

(a) $-B$ genera un semigruppo analitico e $0 \in \rho(B)$,

(b) $-AB^{-1}$ genera un semigruppo analitico,

(c) $D(B^2) \subset D(A)$ e $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che

$$\|AB^{-1}(\lambda+B)^{-1}\ ;\ \mathfrak{L}(X)\| \to 0$$

per $|\lambda| \to +\infty$, uniformemente in $|\arg \lambda| \leq \pi/2 + \varepsilon$.

Allora $-\mathcal{A}_0$ genera un semigruppo analitico in XxX, essendo $\mathcal{A}_0 = K\mathcal{A}K^{-1}$,

$$K = \begin{bmatrix} B & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Il Teorema 1 è, sostanzialmente, il risultato di S.Ya. Yakubov [Y]. Vedi anche la monografia [K].

Nel Teorema 4.1 di [FO] viene provato che sotto le ipotesi (a), (b), (c) il fascio operatoriale $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + A$ è in effetti parabolico secondo la definizione accennata.

Una condizione sufficiente ad assicurare la validità della ipotesi (b) nel *Teorema 1*, che è chiaramente una condizione "ostica" anche se cruciale, è la seguente, fornita in [FO].

Teorema 2. *La* X *è uno spazio di Hilbert e* A,B *sono due operatori autoaggiunti positivi in* X, *tali che*

(a) A e B *commutano*

(b) $D(B) \subset D(A^{\alpha})$ *per un* $\alpha \in (1/2,1)$,

allora $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + A$ *è parabolico.*

Tale risultato può essere visto come una rifinitura di una affermazione di R. Triggiani e S. Chen [CT], secondo cui

Teorema 3. *Se* A,B *sono due operatori autoaggiunti positivi in uno spazio di Hilbert complesso* X, *tali che*

$$\rho_1 A^{\alpha} \leq B \leq \rho_2 A^{\alpha} \ , \ o<\rho_1 < \rho_2 \ ,$$

e

$$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$$

allora la **chiusura** *di* $-\mathcal{A}$ *è il generatore di un semigruppo analitico in* $D(A^{1/2})xX$.

La prima parte di questo Seminario sarà dedicata a togliere la restrizione (a) sulla commutatività dei due operatori autoaggiunti A e B, mostrando che se $1/2 < \alpha \leq 2/3$ e $D(A) = D(B^{1/\alpha})$, allora è possibile estendere A e B ad operatori $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ definiti in uno spazio di extrapolazione Y, contenente X, in cui il fascio

$$\lambda^2 + \lambda\tilde{B} + \tilde{A} \tag{4}$$

è parabolico.

Nella seconda parte mostriamo che se i dati $u_0, u_1 \in X$ sono opportuni e $f \in L^2(0,T;D(B^\beta))$, per valori di $\beta > 0$ dipendenti da α, allora la soluzione stretta u in $L^2(0,T;Y)$ del problema

$$\begin{cases} u''(t)+\tilde{B}u'(t)+\tilde{A}u(t)=f(t), \ 0 \leq t \leq T, \\ u(0)=u_0, \ u'(0)=u_1 \end{cases} \tag{5}$$

è in effetti soluzione di (1), poiché $Au(\cdot)$, $Bu'(\cdot) \in L^2(0,T;X)$.

Descrizione completa dei risultati si trova nel lavoro [F].

1. Parabolicità in spazi di extrapolazione

Sia X uno spazio di Hilbert, con prodotto interno <,>, e siano A,B due operatori lineari autoaggiunti e positivi con X, tali che $D(A) = D(B^{1/\alpha})$, $1/2 < \alpha < 1$.

E' ben noto [T, p. 103] che lo spazio di interpolazione complessa $[X; D(A)]_\alpha$ coincide con $D(A^\alpha)$ e anche con D(B). Poiché $BA^{-\alpha}$ e $A^\alpha B^{-1}$ sono operatori limitati, tali sono anche i loro aggiunti.

Segue facilmente che c'è una costante positiva $K > 0$ tale che

$$\|A^{-\alpha}Bu;X\| = \|A^{-\alpha}Bu\| \leq K\|u\| \ , \quad u \in D(B),$$
$$\|B^{-1}A^\alpha u\| \leq K\|u\| \ , \quad u \in D(A^\alpha) = D(B).$$

Ciò vale anche sostituendo A^α e B con $A^{\alpha/2}$ e $B^{1/2}$, rispettivamente. Se ne deduce

Lemma 1. *Se* A,B *sono operatori autoaggiunti positivi in* X, $D(A) = D(B^{1/\alpha})$, $1/2 < \alpha < 1$, *allora* $\exists\, C_1, C_2 > 0$ *tali che*

$$C_1 \|A^{-\alpha}u\| \leq \|B^{-1}u\| \leq C_2 \|A^{-\alpha}u\|, \quad u \in X,$$

$$C_1 \|A^{-\alpha/2}u\| \leq \|B^{-1/2}u\| \leq C_2 \|A^{-\alpha/2}u\|, \quad u \in X.$$

Lo spazio di extrapolazione Y viene introdotto come

Definizione. Se X è uno spazio di Hilbert, Y è il suo completamento rispetto alla norma

$$\|u\|_* = \|B^{-1/2}u\|, \quad u \in X.$$

$\tilde{A}$, $\tilde{B}$ denotano le chiusure di A e B, rispettivamente.

Faccio presente che la definizione data sopra è solo un caso particolare della situazione considerata in vari lavori da H. AMANN. Si veda, per esempio, [A]; allora X può essere uno spazio di Banach e -B è il generatore di un semigruppo (analitico o anche solo di classe C_0), e $\|u\|_* = \|B^{-\beta}u\|$, $\beta > 0$, $u \in X$.

Nel lavoro [A], viene provato

Lemma 2. $-\tilde{A}$ *e* $-B$ *sono generatori di semigruppi analitici in* Y *se tali sono* $-A$ *e* $-B$ in X.

In virtù del **Teorema 1,** per mostrare che il fascio (4) è parabolico in Y, basterà provare allora due cose:

I) $-\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1}$ genera un semigruppo analitico in Y;

II) $\|\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1}(\lambda+\tilde{B})^{-1}\,;\,\mathfrak{B}(Y)\| \leq C|\lambda|^{-\gamma}$, $|\lambda| \geq$ costante, $\lambda \in \rho(-\tilde{B})$.

essendo γ una costane positiva.

L'affermazione I) risulterà vera sotto una ulteriore condizione su α. Vale, infatti,

Teorema 4. *Supponiamo* A,B *autoaggiunti positivi,* $D(A) = D(B^{1/\alpha})$, *con* $1/2 < \alpha \leq 2/3$.

Allora $-\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1}$ *genera un semigruppo analitico in* Y.

Cenno della dimostrazione

Sia $(AB^{-1} + \lambda)x = f \in X$, $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, $x \in X$.

Prendendo il prodotto interno con x nello spazio Y, dalla

$$\lambda\|B^{-1/2}x\| + \langle B^{-1/2}AB^{-1}x, B^{-1/2}x\rangle = \langle B^{-1/2}f, B^{-1/2}x\rangle$$

si deduce che esiste $C > 0$ tale che

$$C|\lambda| \, \|x\|_* \leq \|(\lambda + AB^{-1})x\|_* \ , \ \mathrm{Re}\lambda \geq 0 \ , \ x \in D(AB^{-1})$$

Quindi la chiusura di $-AB^{-1}$, $\tilde{A}B^{-1}$, genera un semigruppo analitico in Y.

Ma $\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1}$ è una estensione chiusa di $\tilde{A}B^{-1}$. Pertanto, $\lambda + \tilde{A}B^{-1}$ ha anch'essa immagine Y.

Resta da mostrare l'iniettività di $\lambda + \tilde{A}\tilde{B}^{-1}$.

Ora, è noto che

$$D(\tilde{B}) = D(B^{1/2}) \text{ e}$$

$$D(\tilde{A}) = D(A^{1-\alpha/2}), \text{ [vedi [A]]}$$

e quindi, per il teorema di interpolazione richiamato prima,

$$D(\tilde{A}) = [X, D(B^{1/\alpha})]_{(2-\alpha)/2} = D(B^{(2-\alpha)/2\alpha})$$

Poiché $\tilde{B}^{-1}$ è un isomorfismo di $D(\tilde{B}) = D(B^{1/2})$ su $D(\tilde{B}^2) = D(B^{3/2})$ (si vede facilmente), per interpolazione, si trova

$$D(\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1}) = [D(B^{1/2})^* \ , \ D(B^{1/2})]_{(1-\alpha)/\alpha}$$

Per ottenere ciò, si sfrutta anche la uguaglianza

$$Y = D(B^{1/2})^* .$$

Ma, essendo $X = [D(B^{1/2})^* \ , \ D(B^{1/2})]_{1/2}$,

$D(\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1})$ è contenuto in X se e solo se $(1-\alpha)/\alpha \geq 1/2$, cioè, proprio $\alpha \leq 2/3$.

Sia, dunque, $1/2 < \alpha \leq 2/3$ e $(\lambda + \tilde{A}\,\tilde{B}^{-1}x = 0$. Posto $\tilde{B}^{-1}x = y$, allora

$y \in D(\tilde{A}) = D(B^{(2-\alpha)/2\alpha})$ e

$$\lambda = \tilde{B}\,y + \tilde{A}y = 0$$

Ma $(2-\alpha)/2\alpha-1 = (2-3\alpha)/2\alpha \geq 0$ e quindi $y \in D(B)$. Ne segue che

$$\lambda By + \tilde{A}y = 0$$

e $\tilde{A}y = \tilde{A}By \in X$. Così $y \in D(A)$ e $(\lambda B + A)y = 0$.

Se ne deduce $y = 0 = x$.

Poiché il dominio di $\tilde{A}\tilde{B}^{-1}$ è denso in Y, l'affermazione è completamente dimostrata.#

Resta da mostrare II). Infatti, si ha

Teorema 5. *Nelle ipotesi del* Teorema 4,

$$\|\tilde{A}\tilde{B}^{-1}(\lambda + \tilde{B})^{-1} \ ; \ \mathfrak{L}(Y)\| \leq c\,|\lambda|^{(1-2\alpha)/\alpha}, \ |\lambda| \geq \text{costante}, \ \lambda \in \rho(-\tilde{B}).$$

Dimostrazione. Sia $x \in X$; poiché $D(B^2) \subset D(A)$,

$$\|\tilde{A}\tilde{B}^{-1}(\lambda+\tilde{B})^{-1}x\|_* = \|AB^{-1}(\lambda+B)^{-1}x\|_* =$$

$$\|B^{-1/2}\, AB^{-1/2}(\lambda+B)^{-1}\, B^{-1/2}x\|.$$

In base al **Lemma 1**,

$$\|AB^{-1}(\lambda B)^{-1}x\|_* \leq C\|A^{1-\alpha/2}\; B^{-1/2}(\lambda + B)^{-1}\, B^{-1/2}\, x\| \;;$$

poiché $D(A^{1-\alpha/2}) = D(B^{(2-\alpha)/2\alpha})$, e $(2-\alpha)/2\alpha-1/2 = (1-\alpha)/\alpha$

$$\|AB^{-1}(\lambda+B)^{-1}x\|_* \leq C'\|B^{(1-\alpha)/\alpha}\, (\lambda+B)^{-1}\, B^{-1/2}x\| \;.$$

Per la proprietà di interpolazione,

$$\|(\lambda+B)^{-1}\;;\; \mathfrak{L}(X,D(B^{(1-\alpha)/\alpha}))\| \leq C''|\lambda|^{(1-2\alpha)/\alpha} \;;$$

Essendo X denso con Y, la stima II) è ottenuta. #

Segue

Teorema 6. *Nelle ipotesi del* Teorema 4 *il fascio* $\lambda^2 + \lambda\tilde{B} + \tilde{A}$ *è parabolico in* Y.

Si possono allora applicare i risultati su esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni del problema (5), ottenuti da E. Obrecht in [C 1,2], oppure,

sfruttando il **Teorema 1**, utilizzare la teoria dei semigruppi analitici, regolarità massimale, e così via.

Notiamo che molto recentemente, V. Vespri [V] ha studiato la generazione di semigruppi analitici in $H^{-m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbf{N}$, $1<p<+\alpha$, per operatori variazionali ellittici di ordine 2m sotto condizioni di limiti di tipo Dirichlet.

Osservazione. Se A e B sono autoaggiunti positivi, commutano e $D(B) = D(A^{\alpha})$, $1/2 < \alpha < 1$, allora $D(A) = D(B^{1/\alpha})$.

Infatti, per la commutatività, i domini $D(A^{\alpha}B)$ e $D(BA^{\alpha})$ coincidono e $A^{\alpha}Bx = BA^{\alpha}x$, $x \in D(A^{\alpha}B)$.

Ma se $u \in D(B^2)$, $B^2u = B(Bu) = BA^{-\alpha}(A^{\alpha}Bu) = BA^{-\alpha}(BA^{\alpha}u)$.

Così $u \in D(A^{2\alpha})$ e $B^2u = (BA^{-\alpha})^2A^{2\alpha}u$. Scambiando B con A^{α} si ottiene $D(B^2) = D(A^{2\alpha})$. Per interpolazione,

$$[D(A^{\alpha}),D(A^{2\alpha})]_{\theta} = D(A^{\alpha(1+\theta)}) = [D(B),D(B^2)]_{\theta} = D(B^{1+\theta}),$$

$\theta \in (0,1)$. Sia $\theta = 1/\alpha-1$ (Qui è essenziale l'ipotesi $1/2 < \alpha < 1$) come deve essere! Allora $D(A) = D(B^{1/\alpha})$.

Per tali A e B si può applicare, così, il **Teorema 6**, per $1/2 < \alpha \leq 2/3$.

2. Soluzione del problema di Cauchy originale

Quello che si è ottenuto consente di trattare, o direttamente o mediante riduzioni al primo ordine, il problema di Cauchy (5).

Nel caso in cui $f \in L^2(0,T\ ;\ D(B^{1/2})^*)$ e u_o, u_1 appartengono a certi spazi di tracce, un noto risultato di [DPG] fornisce una soluzione stretta, con regolarità massimale, nello stesso spazio.

Cosa si può dire se $f \in L^2\ (0,T;X)$? Possiamo aspettarci che la soluzinoe $\tilde{u}$ di (5) sia effettivamente una soluzione di (1)?

Vediamo di analizzare un po' la questione.

Trasformiamo, prima di tutto, (5) in un problema come (3), con A,B sostituiti da $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$, rispettivamente.

Si ottiene

$$(6) \qquad \begin{cases} z'(t) = -\tilde{\mathcal{A}}\, z(t) + \tilde{f}(t), \ o \le t \le T \\ z(o) = z_o, \end{cases}$$

con

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \ D(\tilde{\mathcal{A}}) = \left[D(B^{1/2})^*, D(B^{1/2})\right]_{(1-\alpha)/\alpha} \times D(B^{1/2}),$$

$$\mathfrak{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}\,\tilde{B}^{-1} & -\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1} \\ \tilde{A}\,\tilde{B}^{-1} & \tilde{B}-\tilde{A}\,\tilde{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}(t)=(f(t)),f(t))$$

$$z_0 = (u_1 + \tilde{B}u_0, u_1) \ , \quad 1/2 < \alpha \leq 2/3 \ ,$$

spazio ambiente YxY.

Poiché $-\mathfrak{A}$ genera un semigruppo analitico, possiamo applicare il Teorema di regolarità massimale *spaziale* di [DPG], secondo il quale, se $z_0 \in D_{-\mathfrak{A}}(\theta+1/2;2)$ e $\tilde{f} \in L^2(0,T,D_{-\mathfrak{A}}(\theta,2))$, $0 < \theta < 1$, allora il problema (6) ha una unica soluzione stretta, nel senso che

$$z', \ \mathfrak{A}z \in L^2(0,T;D_{-\mathfrak{A}}(\theta,2)).$$

$D_{-\mathfrak{A}}(\theta;2) = [Y\mathrm{x}Y \ , D(\mathfrak{A})]_\theta$ coincide, in forza del Teorema di interazione per il metodo di interpolazione complesso e della definizione di $D(\mathfrak{A})$, con

$$[D(B^{1/2})^* \ , D(B^{1/2})]_{(1-\alpha)\theta/\alpha} \times [D(B^{1/2})^* \ , D(B^{1/2})]_\theta \ .$$

Se $1/2 < \theta < 1$,

$$D_{-\mathfrak{A}}(\theta+1/2;2) =$$

$$\{z \in D(\mathfrak{A}); \mathfrak{A}z \in [D(B^{1/2})^*, D(B^{1/2})]_{(1-\alpha)(\theta-1/2)/\alpha} \times [Y,Y^*]_{\theta-1/2}\}$$

Scegliamo $\theta = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)}$ (> 1/2). Allora

$$D_{-\tilde{\mathcal{A}}}(\theta,2) = X \times D(B^{\omega}) \,,\ \omega = (2\alpha-1)/(2-2\alpha)$$

$$[Y,Y^*]_{(1-\alpha)(\theta-1/2)\alpha} = [Y,Y^*]^*_{(1+1/\alpha)/2} \supseteq X$$

$$[Y,Y^*]_{\theta-1/2} = [Y,Y^*]_{(2\alpha-1)/(2-2\alpha)} \supseteq X,$$

proprio perché $\alpha \leq 2/3$.

Pertanto, vale il

Teorema 7. *Sotto le assunzioni del* **Teorema 4,** *se* $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(B)$ *e* $f \in L^2(0,T;D(B^{\omega}))$, $\omega = (2\alpha-1)/(2-2\alpha)$, *allora la soluzione stretta* $\tilde{u}$ *di* (5) *ha la regolarità*

$$u'' \in L^2(0,T;Z),\ \tilde{A}u \in L^2(0,T;X),\ \tilde{A}u + \tilde{B}u' \in L^2(0,T;Z),$$

dove $Z = D(B^{\sigma})$, $\sigma = (3\alpha-1)/(2-2\alpha)$.

In particolare $\tilde{u} = u$ *soddisfa* (1), *con*

$u(t) \in D(A)$, $u'(t) \in D(B)$ *e* u'', Bu', $Au \in L^2(0,T;X)$.

Per vedere cosa succede nel caso $\theta = 1/2$, cioè se si assume che $f \in L^2(0,T;X)$, poiché può essere difficile tradurre i risultati di E. Di Blasio [D, p. 84] a questo proposito, ci limitiamo ad osservare che se $z_0 \in D(\mathfrak{A}^2)$ e $\tilde{f} \in L^2(0,T;D_{\mathfrak{A}}(1/2;2))$, allora la corrispondente soluzione stretta z di (6) soddisfa ancora

$$z',\ \mathfrak{A}z \in L^2(0,T;D_{\mathfrak{A}}(1/2;2)).$$

Leggendo che cosa significhino queste condizioni nel nostro caso, otteniamo

Teorema 8. *Sia* $f \in L^2(0,T;X)$, $u_0 \in D(A^{2-3/2\alpha})$, $u_1 \in D(B)$, $Au_0 + Bu_1 \in D(B^{1/2})$.

Allora la soluzione stretta $\tilde{u}$ *del problema* (5) *ha la regolarità* $u \in H^2(0,T;X)$, $u(t) \in D(A^{3/2-\alpha})$, $u'(t) \in D(B^{1/(2\alpha)})$.

Esempio. Siano H,K due operatori autoaggiunti positivi in X, con $D(H) = D(K)$ e $D(H^2) = D(K^2)$.

Sia $K^2 = B$ e sia $A = KHK$; tutte le nostre condizioni sono allora soddisfatte, con $\alpha = 2/3$.

Ad esempio, $X = L^2(0,1)$,

$$D(K) = H_2(0,1) \cap H^1_o(0,1) \ , \ Ku = -u'', \ u \in D(K),$$

$$D(H) = D(K) \ , \ (Hu)(x) = -(a(x)u'(x))' \ , \ u \in D(H),$$

dove a è una funzione positiva in [0,1], sufficientemente regolare, con $a'(0) = a'(1) = 0$.

L'ipotesi su a(x) assicura che $D(K^2) = D(H^2)$.

BIBLIOGRAFIA

[A] H. AMANN, *On abstract parabolic fundamental solutions*, J. Math. Soc. Japan 29 (1987), 93-116.

[CT] S. CHEN-R. TRIGGIANI, *Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems*, Pacific J. Math. 136 (1989), 15-55.

[DPG] G. DA PRATO-P. GRISVARD, *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielle opérationnelles*, J. Math. pures et Appl. 54 (1975), 305-387.

[D] G. DI BLASIO, *Linear parabolic evolution equations in* L^p*-spaces*, Annali Mat. pura appl., 138 (1984), 55-104.

[F] A. FAVINI, *Parabolicity of second order differential equations in Hilbert space*, in corso di stampa su Semigroup Forum.

[FO] A. FAVINI-E. OBRECHT, *Conditions for parabolicity of second order abstract differential equations*, in corso di stampa su Diff. & Integral Eqs.

[K] S.G. KREN, *Linear differential equations on Banach space*, Nauka, Moscow, 1963, Transl. Math. Monographs n. 29, Ann. Math. Soc., Providence, R.I.

[01] E. OBRECHT, *Evolution operators for higher order abstract parabolic equations*, Czechoslovak Math. J. 36 (1986), 210-222.

[02] E. OBRECHT, *Second order abstract parabolic equations*, Semesterbericht Funktional Analysis Tübingen, Sommersemester 1986, 191-206.

[T] H. TRIEBEL, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North Holland, 1978.

[V] V. VESPRI, *Analytic semigroups generated in* $H^{-m,p}$ *by elliptic variational operators and applications to linear Cauchy problems*, in "Semigroup theory and Applications" ed. P. Clement, S. Invernizzi, E. Mitidieri, I. Vrabie (1989), 419-431, ed. M. Dekker.

[Y] S. YA. YAKUBOV, *A nonlocal boundary value problem for a class of Petrovskij well posed equations*, Math. Sb. (NS), 18(1982), 252-261, Math. USSR-SB 46 (1983); 255-265.